Cauchy型の行列式, Pfaffianとその応用 (組合せ論的表現論の諸相)

AUTHOR(S):

岡田, 聡一

数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 198-215

Cauchy 型の行列式，Pfaffian とその応用

名古屋大学多元数理科学研究科 岡田 聡一

はじめに

組合せ論や表現論では，特別な形をした行列式や Pfaffian の計算が鍵となる場面が多い．例えば，Vandermonde の行列式

$$\det\left(x_i^{j-1}\right)_{1\le i,j\le n}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

は，Weyl の分母公式として一般化され，さまざまな形で用いられる．また，Vandermonde の行列式の拡張である Krattenthaler の公式

$$\det\left(\prod_{k=2}^{j}(x_i+b_k)\prod_{k=j+1}^{n}(x_i+a_k)\right)_{1\le i,j\le n}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\prod_{2\le i\le j\le n}(b_i-a_j)$$

は，平面分割の数え上げなどで有用である．

これらの Vandermonde 型の行列式とは別の形の行列式，Pfaffian で重要な役割を果たしているのが，Cauchy の行列式 [C, eqn.(10)]

$$\det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right)=\frac{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)} \tag{1}$$

と Schur の Pfaffian [Sc, p.225]

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{x_j-x_i}{1-x_ix_j}\right)=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_j-x_i}{1-x_ix_j} \tag{2}$$

である．この報告では，この Cauchy の行列式，Schur の Pfaffian の拡張とみなすことができる行列式，Pfaffian（総称して Cauchy 型の行列式，Pfaffian と呼ぶ）の分解公式（予想）を提示し，パラメーターを特殊化することによって得られるいくつかの結果について述べる．まず，§1 では Cauchy 型の行列式，Pfaffian の分解公式（予想）を与え，§2, §3 ではこれらの公式から Schur 関数，あるいは Littlewood–Richardson 係数に関するいくつかの関係式を導く．§4 では，交代符号行列の数え上げ問題への応用を解説する．

1 Cauchy 型の行列式，Pfaffian — 予想 —

まず，$\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\overrightarrow{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ という n 変数の組に対して，次のような Vandermonde 型の行列 $V^{p,q}(\overrightarrow{x};\overrightarrow{a})$, $W^n(\overrightarrow{x};\overrightarrow{a})$ を考える．$p+q=n$ となる非負整数 p,q に対して，

$$(1,x_i,x_i^2,\cdots,x_i^{p-1},a_i,a_ix_i,\cdots,a_ix_i^{q-1})$$

を第 i 行とする n 次正方行列を $V^{p,q}(\overrightarrow{x};\overrightarrow{a})$ と表す．つまり，

$$V^{p,q}(\overrightarrow{x};\overrightarrow{a})=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{p-1} & a_1 & a_1x_1 & \cdots & a_1x_1^{q-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{p-1} & a_n & a_nx_n & \cdots & a_nx_n^{q-1}\end{pmatrix}.$$

また，

$$(1+a_ix_i^{n-1},x_i+a_ix_i^{n-2},\cdots,x_i^{n-1}+a_i)$$

を第 i 行とする n 次正方行列を $W^n(\overrightarrow{x};\overrightarrow{a})$ と表す．つまり，

$$W^n(\overrightarrow{x};\overrightarrow{a})=\begin{pmatrix}1+a_1x_1^{n-1} & x_1+a_1x_1^{n-2} & \cdots & x_1^{n-1}+a_1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+a_nx_n^{n-1} & x_n+a_nx_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+a_n\end{pmatrix}.$$

このとき，Cauchy の行列式 (1) の拡張として次の等式が予想される．

予想 1.1. (a) n を正整数，p,q を非負整数とする．6 組の変数

$$\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,x_n),\quad \overrightarrow{y}=(y_1,\cdots,y_n),\quad \overrightarrow{z}=(z_1,\cdots,z_{p+q}),$$
$$\overrightarrow{a}=(a_1,\cdots,a_n),\quad \overrightarrow{b}=(b_1,\cdots,b_n),\quad \overrightarrow{c}=(c_1,\cdots,c_{p+q})$$

に対して，

$$\det\left(\frac{\det V^{p+1,q+1}(x_i,y_j,\overrightarrow{z};a_i,b_j,\overrightarrow{c})}{y_j-x_i}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$=\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\prod_{i,j=1}^{n}(y_j-x_i)}\det V^{p,q}(\overrightarrow{z};\overrightarrow{c})^{n-1}\det V^{n+p,n+q}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z};\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}). \tag{3}$$

(b) n を正整数，p を非負整数とする．6 組の変数

$$\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,x_n),\quad \overrightarrow{y}=(y_1,\cdots,y_n),\quad \overrightarrow{z}=(z_1,\cdots,z_p),$$
$$\overrightarrow{a}=(a_1,\cdots,a_n),\quad \overrightarrow{b}=(b_1,\cdots,b_n),\quad \overrightarrow{c}=(c_1,\cdots,c_p)$$

に対して,

$$\det\left(\frac{\det W^{p+2}(x_i,y_j,\overrightarrow{z};a_i,b_j,\overrightarrow{c})}{(y_j-x_i)(1-x_iy_j)}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$=\frac{(-1)^n}{\prod_{i,j=1}^{n}(y_j-x_i)(1-x_iy_j)}$$
$$\times\det W^{p}(\overrightarrow{z};\overrightarrow{c})^{n-1}\det W^{2n+p}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z};\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}). \qquad (4)$$

さらに,Schur の Pfaffian (2) の拡張としては次の等式が予想される.

予想 1.2. (a) n を正整数,p,q,r,s を非負整数とする.7 組の変数

$$\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,x_{2n}),\quad \overrightarrow{a}=(a_1,\cdots,a_{2n}),\quad \overrightarrow{b}=(b_1,\cdots,b_{2n}),$$
$$\overrightarrow{z}=(z_1,\cdots,z_{p+q}),\quad \overrightarrow{c}=(c_1,\cdots,c_{p+q}),$$
$$\overrightarrow{w}=(w_1,\cdots,w_{r+s}),\quad \overrightarrow{d}=(d_1,\cdots,d_{r+s})$$

に対して,

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{\det V^{p+1,q+1}(x_i,x_j,\overrightarrow{z};a_i,a_j,\overrightarrow{c})\det V^{r+1,s+1}(x_i,x_j,\overrightarrow{w};b_i,b_j,\overrightarrow{d})}{x_j-x_i}\right)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$=\frac{1}{\prod_{1\le i<j\le 2n}(x_j-x_i)}\det V^{p,q}(\overrightarrow{z};\overrightarrow{c})^{n-1}\det V^{r,s}(\overrightarrow{w};\overrightarrow{d})^{n-1}$$
$$\times\det V^{n+p,n+q}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z};\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})\det V^{n+r,n+s}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{w};\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}). \qquad (5)$$

(b) n を正整数,p,q を非負整数とする.7 組の変数

$$\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,x_{2n}),\quad \overrightarrow{a}=(a_1,\cdots,a_{2n}),\quad \overrightarrow{b}=(b_1,\cdots,b_{2n}),$$
$$\overrightarrow{z}=(z_1,\cdots,z_{p}),\quad \overrightarrow{c}=(c_1,\cdots,c_{p}),$$
$$\overrightarrow{w}=(w_1,\cdots,w_{q}),\quad \overrightarrow{d}=(d_1,\cdots,d_{q})$$

に対して,

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{\det W^{p+2}(x_i,x_j,\overrightarrow{z};a_i,a_j,\overrightarrow{c})\det W^{q+2}(x_i,x_j,\overrightarrow{w};b_i,b_j,\overrightarrow{d})}{(x_j-x_i)(1-x_ix_j)}\right)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$=\frac{1}{\prod_{1\le i<j\le 2n}(x_j-x_i)(1-x_ix_j)}\det W^{p}(\overrightarrow{z};\overrightarrow{c})^{n-1}\det W^{q}(\overrightarrow{w};\overrightarrow{d})^{n-1}$$
$$\times\det W^{2n+p}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z};\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})\det W^{2n+q}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{w};\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}). \qquad (6)$$

これらの予想の原形(p などがすべて 0 である場合)は,[O1] で与えられ,長方形の Young 図形に対応する古典群の既約表現のテンソル積や部分群への制限の分解(multiplicity-free となることがわかる)の決定に利用された.これらの予想は,現在次の場合に証明できている.

定理 1.3. (a) 等式 (3) は，$(p,q)=(0,0),(0,1),(1,0)$ のとき成り立つ．
(b) 等式 (4) は，$p=0,1$ のとき成り立つ．
(c) 等式 (5) は，$p=q=r=s=0$ のとき，あるいは，p,q,r,s のうちの 1 つが 1 でありその他が 0 であるとき，成り立つ．
(d) 等式 (6) は，$(p,q)=(0,0),(0,1),(1,0)$ のとき成り立つ．

証明の方針． アイデアは [O1] の証明と同じである．例えば，(3) の両辺は各 a_i, b_j に対して高々 1 次式だから，(3) を証明するには，両辺における $a^I b^J=\prod_{i\in I}a_i\prod_{j\in J}b_j$ の係数が等しいことを示せばよい．そして，これらの係数に関する関係式は，最終的には Cauchy の行列式に帰着して証明できる．

2 特殊化その 1 — 三角形の Schur 関数 —

この節では，等式 (3), (5) において

$$x_i\to x_i^2,\quad y_i\to y_i^2,\quad z_i\to z_i^2,\quad a_i\to x_i,\quad b_i\to y_i,\quad c_i\to z_i \tag{7}$$

と特殊化したものを考える．この特殊化によって，(3), (5) がそれぞれ Cauchy の行列式，Schur の Pfaffian の拡張を与えていることがわかる．

以下，$\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ に対して，

$$\Delta(\vec{x})=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i),$$
$$\vec{x}^k=(x_1^k,\cdots,x_n^k)\quad(k\in\mathbb{Z})$$

とおき，分割 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に対応する Schur 関数を

$$s_\lambda(\vec{x})=\frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\le i,j\le n}}{\det\left(x_i^{n-j}\right)_{1\le i,j\le n}}$$

と表すことにする．また，正整数 r に対して，分割 $\delta(r)$ を

$$\delta(r)=(r,r-1,\cdots,2,1)$$

とおいて定める．($r=0$ のときは $\delta(0)=\emptyset$ であるとする．) このとき，行列式の列を並べかえることにより，

$$\det V^{p,q}(\vec{x}^2;\vec{x})=\begin{cases}(-1)^{q(2p-q-1)/2}\Delta(\vec{x})s_{\delta(p-q-1)}(\vec{x}) & (p>q \text{ のとき})\\ (-1)^{p(p-1)/2}\Delta(\vec{x})s_{\delta(q-p)}(\vec{x}) & (p\le q \text{ のとき})\end{cases}$$

となることがわかる．これを用いると，等式 (3), (5) から変数の特殊化 (7) によって，次の定理が得られる．

定理 2.1. e, f を非負整数とする．予想 (3), (5) が成り立つと仮定すると，

$$\det\left(\frac{s_{\delta(e)}(x_i, y_j, \overrightarrow{z})}{x_i + y_j}\right)_{1\le i,j\le n} = \frac{\Delta(\overrightarrow{x})\Delta(\overrightarrow{y})}{\prod_{i,j=1}^{n}(x_i + y_j)} s_{\delta(e)}(\overrightarrow{z})^n s_{\delta(e)}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}), \tag{8}$$

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} s_{\delta(e)}(x_i, x_j, \overrightarrow{z}) s_{\delta(f)}(x_i, y_j, \overrightarrow{w})\right)_{1\le i,j\le 2n} = \prod_{1\le i<j\le 2n} \frac{x_j + x_i}{x_j - x_i} s_{\delta(e)}(\overrightarrow{z})^{n-1} s_{\delta(f)}(\overrightarrow{w})^{n-1} s_{\delta(e)}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) s_{\delta(f)}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{w}). \tag{9}$$

等式 (8) において，$e = 0$ とすると，

$$\det\left(\frac{1}{x_i + y_j}\right)_{1\le i,j\le n} = \frac{\Delta(\overrightarrow{x})\Delta(\overrightarrow{y})}{\prod_{i,j=1}^{n}(x_i + y_j)}$$

となるが，これはよく知られた Cauchy の等式（(1) の別の形）に他ならない．また，(9) において，$e = f = 0$ とすると，

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}\right)_{1\le i,j\le 2n} = \prod_{1\le i<j\le 2n} \frac{x_j + x_i}{x_j - x_i}$$

となるが，これは Schur の Pfaffian (2) に他ならない．

次に，(8) において $e = 1$，(9) において $e = f = 1$ とすると，

$$\det\left(\frac{z + x_i + y_j}{z(x_i + y_j)}\right)_{1\le i,j\le n} = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j=1}^{n}(x_i + y_j)} \cdot \frac{z + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}{z}, \tag{10}$$

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \cdot \frac{z + x_i + x_j}{z} \cdot \frac{w + x_i + x_j}{w}\right)_{1\le i,j\le 2n} = \prod_{1\le i<j\le 2n} \frac{x_j + x_i}{x_j - x_i} \cdot \frac{z + \sum_{i=1}^{2n} x_i}{z} \cdot \frac{w + \sum_{i=1}^{2n} x_i}{w} \tag{11}$$

が得られる．($s_{\delta(1)}(\overrightarrow{z}) = z$, $s_{\delta(1)}(\overrightarrow{w}) = w$ とおいた.)

これらの等式 (10), (11) は楕円関数を用いた拡張が可能である．楕円関数とその退化を同時に扱うために，次の 2 つの条件 (i), (ii) をみたす $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $[x]$ ($x \in \mathbb{C}$) を考える：

(i) $[x]$ は奇関数である．つまり，$[-x] = -[x]$.

(ii) $[x]$ は Riemann の関係式

$$[x+y][x-y][u+v][u-v] - [x+u][x-u][y+v][y-v] + [x+v][x-v][y+u][y-u] = 0.$$

をみたす．

このような関数 $[x]$ は，変換 $[x] \to e^{ax^2+b}[cx]$ を施すことによって，次のいずれかの関数に変換されることが知られている．([WW, p. 461] を見よ.)

(a) （楕円関数）$[x] = \sigma(x)$（Weirstrass の σ 関数），
(b) （三角関数）$[x] = e^x - e^{-x}$,
(c) （有理関数）$[x] = x$.

定理 2.2. 上の記号を用いると，

$$\det\left(\frac{[z+x_i+y_j]}{[z][x_i+y_j]}\right)_{1\le i,j\le n} = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}[x_j-x_i][y_j-y_i]}{\prod_{i,j=1}^n [x_i+y_j]}\frac{[z+\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n y_i]}{[z]}, \tag{12}$$

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{[x_j-x_i]}{[x_j+x_i]}\frac{[z+x_i+x_j]}{[z]}\frac{[w+x_i+x_j]}{[w]}\right)_{1\le i,j\le 2n} = \prod_{1\le i<j\le 2n}\frac{[x_j-x_i]}{[x_j+x_i]}\frac{[z+\sum_{i=1}^{2n} x_i]}{[z]}\frac{[w+\sum_{i=1}^{2n} x_i]}{[w]}. \tag{13}$$

この定理の有理関数版が等式 (10), (11) である．等式 (12) は Frobenius [F] にまでさかのぼる古いものであるが，(13) は新しい結果のようである．(証明は [O3] を参照されたい.)

3 特殊化その 2 — 長方形の Schur 関数 —

この節では，等式 (3), (5) において，

$$a_i \to x_i^k, \quad b_i \to y_i^k, \quad c_i \to z_i^k, \quad d_i \to w_i^k \tag{14}$$

と特殊化したものを考える．

$a \times b$ の長方形の Young 図形（に対応する分割）を $\square(a,b)$ と表す：

$$\square(a,b) = (b^a) = (\underbrace{b,\cdots,b}_{a\text{ 個}}).$$

このとき，Schur 関数の定義から，

$$\det V^{p,q}(\vec{x};\vec{x}^k) = \begin{cases} \Delta(\vec{x})s_{\square(q,k-p)}(\vec{x}) & (k \ge p \text{ のとき}) \\ 0 & (k < p \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．

等式 (3), (5) において，特殊化 (14) を施すと，それぞれ次のように変形できる．

$$\frac{1}{\Delta(\overrightarrow{x})\Delta(\overrightarrow{y})}\det\left(s_{\square(q+1,e+n-1)}(x_i,y_j,\overrightarrow{z})\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$=(-1)^{n(n+1)/2}s_{\square(q,e+n)}(\overrightarrow{z})^{n-1}s_{\square(q+n,e)}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}), \tag{15}$$
$$\frac{1}{\Delta(\overrightarrow{x})}\mathrm{Pf}\left((x_j-x_i)s_{\square(q+1,e+n-1)}(x_i,x_j,\overrightarrow{z})s_{\square(s+1,f+n-1)}(x_i,x_j,\overrightarrow{w})\right)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$=s_{\square(q,e+n)}(\overrightarrow{z})^{n-1}s_{\square(s,f+n)}(\overrightarrow{w})^{n-1}s_{\square(n+q,e)}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z})s_{\square(n+s,f)}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{w}). \tag{16}$$

以下，$q=0$ または $q=s=0$ の場合に，Cauchy–Binet の公式，または石川–若山の小行列の和公式を用いて，(15), (16) の両辺を $\overrightarrow{x}$ に関する Schur 関数で展開したときの係数を比較する．

3.1 Jacobi–Trudi の公式へ

まず，(15) において $q=0$ とすると，

$$\frac{1}{\Delta(\overrightarrow{x})\Delta(\overrightarrow{y})}\det\left(h_{e+n-1}(x_i,y_j,\overrightarrow{z})\right)_{1\le i,j\le n}=(-1)^{n(n+1)/2}s_{\square(n,e)}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$$

となる．ここで，$h_k(\overrightarrow{x})=s_{\square(1,k)}(\overrightarrow{x})$ は k 次完全対称式である．そして，左辺の行列式の各成分は

$$h_{e+n-1}(x,y,\overrightarrow{z})=\sum_{i,j=0}^{e+n-1}x^iy^jh_{e+n-1-i-j}(\overrightarrow{z})$$

と展開できる．

さて，(一般化された) Cauchy–Binet の公式を思い出そう．

補題 3.1. X,Y を $n\times N$ 行列，A を $N\times N$ 行列とするとき，

$$\sum_{I,J}\det A_{I,J}\det X_I\det Y_J=\det(XA{}^tY).$$

ここで，和は $[N]=\{1,2,\cdots,N\}$ の n 元部分集合 I, J の対 (I,J) 全体にわたる．また，X_I, Y_J は X,Y からそれぞれ I, J に対応する列を取り出して得られる n 次正方行列を，$A_{I,J}$ は A から I に対応する行と J に対応する列を取り出して得られる n 次正方行列を表す．

この Cauchy–Binet の公式を

$$A=\left(h_{e+n-1-i-j}(\overrightarrow{z})\right)_{0\le i,j\le e+n-1},$$
$$X=\left(x_i^j\right)_{1\le i\le n,0\le j\le e+n-1},\quad Y=\left(y_i^j\right)_{1\le i\le n,0\le j\le e+n-1}$$

に対して適用する．このとき，長さ n 以下の分割 λ に対して，

$$I(\lambda)=\{\lambda_n,\lambda_{n-1}+1,\cdots,\lambda_2+n-2,\lambda_1+n-1\}$$

とおくと，

$$\det X_{I(\lambda)}=\Delta(\overrightarrow{x})s_\lambda(\overrightarrow{x}),\quad \det Y_{I(\lambda)}=\Delta(\overrightarrow{y})s_\lambda(\overrightarrow{y})$$

となるから，

$$\frac{1}{\Delta(\overrightarrow{x})\Delta(\overrightarrow{y})}\det\left(h_{e+n-1}(x_i,y_j,\overrightarrow{z})\right)_{1\le i,j\le n}=\sum_{\lambda,\mu}\det A_{I(\lambda),I(\mu)}s_\lambda(\overrightarrow{x})s_\mu(\overrightarrow{y}).$$

ここで，λ,μ は長さ n 以下の分割全体をわたる．従って，

命題 3.2. 等式 (3) が成り立つと仮定すると，

$$(-1)^{n(n+1)/2}s_{\square(n,e)}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})=\sum_{\lambda,\mu}\det A_{I(\lambda),I(\mu)}s_\lambda(\overrightarrow{x})s_\mu(\overrightarrow{y}). \tag{17}$$

ここで，λ,μ は長さ n 以下の分割全体をわたり，

$$A=\left(h_{e+n-1-i-j}(\overrightarrow{z})\right)_{0\le i,j\le e+n-1}$$

である．

等式 (17) において，$p=0$ の場合を考える．(定理 1.2 からこの場合には (3) が成り立つ.）このときは，変数 $\overrightarrow{z}$ は現れず，$A=(\delta_{i+j,e+n-1})_{0\le i,j\le e+n-1}$ となるから，

$$\det A_{I(\lambda),I(\mu)}=\begin{cases}(-1)^{n(n-1)/2} & (\lambda_i+\mu_{n+1-i}=e\ (1\le i\le n)\ \text{であるとき})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

分割 $\lambda\subset\square(n,e)$ に対して，

$$\lambda^\dagger=\lambda^\dagger(n,e)=(e-\lambda_n,e-\lambda_{n-1},\cdots,e-\lambda_1)$$

とおく．($\lambda^\dagger$ は n,e に依存して定まるので，そのことを明示したいときは $\lambda^\dagger(n,e)$ と表す.）すると，(17) より，

命題 3.3.

$$s_{\square(n,e)}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=\sum_{\lambda\subset\square(n,e)}s_\lambda(\overrightarrow{x})s_{\lambda^\dagger}(\overrightarrow{y}).$$

ここで，和は長方形 $\square(n,e)$ に含まれる分割 λ 全体をわたる．

この命題を Littlewood–Richardson 係数の言葉で言い換えると，

$$\mathrm{LR}_{\lambda,\mu}^{\square(n,e)} = \begin{cases} 1 & (\mu = \lambda^{\dagger} \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．

命題 3.3 を用いると，(17) の左辺は，

$$s_{\square(n,e)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \sum_{\lambda} s_{\lambda^{\dagger}}(\vec{x}) s_{\lambda}(\vec{y},\vec{z}) = \sum_{\lambda,\mu} s_{\lambda^{\dagger}}(\vec{x}) s_{\mu}(\vec{y}) s_{\lambda/\mu}(\vec{z}).$$

と変形できる．よって，(17) において $s_{\lambda^{\dagger}}(\vec{x})s_{\mu}(\vec{y})$ の係数を比較すると，

$$s_{\lambda/\mu}(\vec{z}) = (-1)^{n(n-1)/2} \det A_{I(\lambda^{\dagger}),I(\mu)} \tag{18}$$

となる．ところが，行列 $A_{I(\lambda^{\dagger}),I(\mu)}$ の (i,j) 成分は

$$h_{r+n-1-(r-\lambda_{n+1-i}+n-i)-(\mu_j+n-j)}(\vec{z}) = h_{\lambda_{n+1-i}-\mu_j-(n+1-i)+j}(\vec{z})$$

で与えられるから，(18) は Jacobi–Trudi の等式に他ならない：

$$s_{\lambda/\mu}(\vec{z}) = \det\left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}(\vec{z})\right)_{1\le i,j\le n}.$$

3.2 Littlewood–Richardson 係数の間のある関係

次に，(16) において，$q=s=0$ とすると，

$$\frac{1}{\Delta(\vec{x})}\operatorname{Pf}\left((x_j-x_i)h_{e+n-1}(x_i,x_j,\vec{z})h_{f+n-1}(x_i,x_j,\vec{w})\right)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$= s_{\square(n,e)}(\vec{x},\vec{z})s_{\square(n,f)}(\vec{x},\vec{w}). \tag{19}$$

ここで，

$$(y-x)h_{e+n-1}(x,y,\vec{z})h_{f+n-1}(x,y,\vec{w})$$

における x^iy^j の係数を b_{ij} とおき，b_{ij} を並べてできる行列を $B=(b_{ij})_{i,j\ge 0}$ とする．明らかに，$b_{ij}=-b_{ji}$ である．また，$i<j$ のとき，b_{ij} は次の形に表される：

$$b_{ij} = \sum_{p,q} h_p(\vec{z})h_q(\vec{w}).$$

ここで，和は

$$p+q = (e+n-1)+(f+n-1)+1-i-j,$$
$$0\le p\le e+n-1-i,\quad 0\le q\le f+n-1-i$$

をみたすすべての整数の対 (p,q) 全体にわたる．

さて，石川–若山の小行列式の和公式を思い出そう．

補題 3.4. （石川–若山 [IW]） X を $2n \times N$ 行列，A を $N \times N$ 交代行列とするとき，

$$\sum_I \operatorname{Pf} A_I \det X_I = \operatorname{Pf}(XA{}^tX).$$

ここで，I は $[N]$ の $2n$ 元部分集合全体を動く．また，A_I は A から I に対応する行，列を取り出して得られる交代行列を表す．

この小行列の和公式を

$$A = (b_{ij})_{i,j\geq 0}, \quad X = (x_i^j)_{1\leq i\leq 2n, j\geq 0}$$

に対して適用すると，(19) の左辺は

$$\frac{1}{\Delta(\vec{x})} \operatorname{Pf}\left((x_j - x_i)h_{e+n-1}(x_i, x_j, \vec{z})h_{f+n-1}(x_i, x_j, \vec{w})\right)_{1\leq i,j\leq 2n} = \sum_\lambda \operatorname{Pf} B_{I(\lambda)} \cdot s_\lambda(\vec{x})$$

（ここで，和は長さ $2n$ 以下の分割 λ 全体にわたる）と展開できる．一方，命題 3.3 より

$$s_{\square(n,e)}(\vec{x}, \vec{z}) = \sum_{\mu\subset\square(n,e)} s_\mu(\vec{x}) s_{\mu^\dagger(n,e)}(\vec{z}),$$
$$s_{\square(n,f)}(\vec{x}, \vec{w}) = \sum_{\nu\subset\square(n,f)} s_\nu(\vec{x}) s_{\nu^\dagger(n,f)}(\vec{w})$$

となるから，(19) の右辺は

$$s_{\square(n,e)}(\vec{x}, \vec{z}) s_{\square(n,f)}(\vec{x}, \vec{w}) = \sum_\lambda \left(\sum_{\substack{\mu\subset\square(n,e)\\ \nu\subset\square(n,f)}} \mathrm{LR}_{\mu,\nu}^\lambda \, s_{\mu^\dagger(n,e)}(\vec{z}) s_{\nu^\dagger(n,f)}(\vec{w}) \right) s_\lambda(\vec{x})$$

と展開できる．従って，(19) の両辺の $s_\lambda(\vec{x})$ の係数を比較することにより，次の命題が得られる．

命題 3.5. 予想 (5) が成り立つと仮定すると，

$$\sum_{\substack{\mu\subset\square(n,e)\\ \nu\subset\square(n,f)}} \mathrm{LR}_{\mu,\nu}^\lambda \, s_{\mu^\dagger(n,e)}(\vec{z}) s_{\nu^\dagger(n,f)}(\vec{w}) = \operatorname{Pf} B_{I(\lambda)}.$$

ここで，行列 $B = (b_{ij})$ は

$$(y - x)h_{e+n-1}(x, y, \vec{z})h_{f+n-1}(x, y, \vec{w}) = \sum_{i,j} x^i y^j b_{ij}$$

によって与えられる．

この命題において $s=0$ の場合（つまり，変数 $\overrightarrow{w}$ が現れない場合）を考える．この場合は，$i<j$ のとき，

$$b_{ij}=\begin{cases} h_{(e+n-1)+(f+n-1)+1-i-j}(\overrightarrow{z}) \\ \qquad (0\le i\le \min(e+n-1,f+n-1) \text{ かつ } j\ge f+n \text{ のとき}) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．

補題 3.6. $X=\begin{pmatrix} O & Y \\ -{}^tY & O\end{pmatrix}$（$Y$ は $m\times(2n-m)$ 行列）の形の交代行列に対して，

$$\operatorname{Pf}X=\begin{cases}(-1)^{n(n-1)/2}\det X & (m=n \text{ のとき}) \\ 0 & (m\ne n \text{ のとき})\end{cases}$$

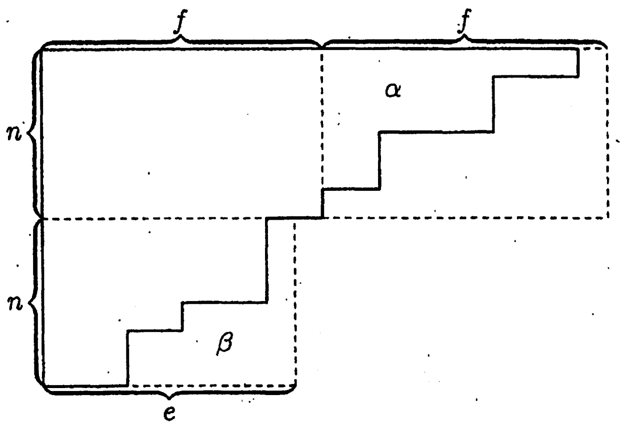
この補題に注意すると，分割 λ が条件

$$\lambda_{n+1}\le \min(e,f), \quad \text{かつ} \quad \lambda_n\ge f \tag{20}$$

をみたさなければ，$\operatorname{Pf}B_{I(\lambda)}=0$ となることがわかる．また，λ が条件 (20) をみたすとき，

$$\alpha_i=\lambda_i-f,\quad \beta_i=e-\lambda_{2n+1-i}\quad (1\le i\le n) \tag{21}$$

とおく.（下図を参照せよ.）



このとき，α,β は分割であり，

$$\operatorname{Pf}B_{I(\lambda)}=(-1)^{n(n-1)/2}\det\left(h_{\beta_i-\alpha_{n+1-j}-i+(n+1-j)}\right)_{1\le i,j\le n}=s_{\beta/\alpha}(\overrightarrow{z})$$

となる．従って，

定理 3.7. 予想 (5) が成り立つと仮定する．λ を長さ $2n$ 以下の分割とし，$\mu \subset \square(n,e)$ とするとき，

(i) λ が条件 (20) をみたさなければ，

$$\mathrm{LR}^{\lambda}_{\mu,\square(n,f)} = 0.$$

(ii) λ が条件 (20) をみたすとき，分割 α, β を (21) によって定めると，

$$\mathrm{LR}^{\lambda}_{\mu,\square(n,f)} = \mathrm{LR}^{\beta}_{\alpha,\mu^{\dagger}(n,e)}.$$

特に，$\beta \supset \alpha$ でなければ，

$$\mathrm{LR}^{\lambda}_{\mu,\square(n,f)} = 0.$$

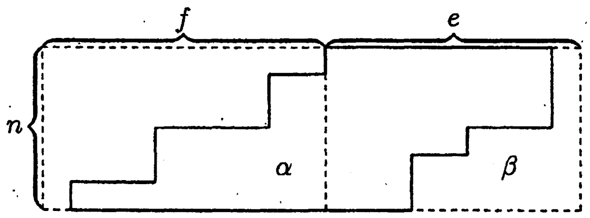
一般に，

$$\mathrm{LR}^{\beta}_{\alpha,\mu^{\dagger}(n,e)} = \mathrm{LR}^{\beta^{\dagger}(n,e+f)}_{\alpha^{\dagger}(n,f),\mu}$$

が成り立つから，定理 3.7 より

$$\mathrm{LR}^{\lambda}_{\mu,\square(n,f)} = \mathrm{LR}^{\beta^{\dagger}(n,e+f)}_{\alpha^{\dagger}(n,f),\mu} \tag{22}$$

となる．歪 Young 図形 $\beta^{\dagger}(n,e+f)/\alpha^{\dagger}(n,f)$ を図示すると，次のようになる．



問題 3.8. Littlewood–Richardson 係数の関係式 (22) を，Littlewood–Richardson 盤の間の全単射を構成することによって示せ．

定理 3.7 において，$\mu = \square(n,e)$ の場合，$\mu/\square(n,e)$ が horizontal strip あるいは vertical strip である場合を考えると，次の系が得られる．(この系は，Littlewood–Richardson 規則を用いて証明できる．[St] を見よ．)

系 3.9. 長さ $2n$ 以下の分割 λ が条件 (20) をみたすとき，分割 α, β を (21) によって定めると，

$$\mathrm{LR}^{\lambda}_{(e^n),(f^n)} = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\mathrm{LR}^{\lambda}_{(e^{n-1},e-k),(f^n)} = \begin{cases} 1 & (\beta/\alpha \text{ が長さ } k \text{ の horizontal strip であるとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\mathrm{LR}^{\lambda}_{(e^{n-k},(e-1)^k),(f^n)} = \begin{cases} 1 & (\beta/\alpha \text{ が長さ } k \text{ の vertical strip であるとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

4 交代符号行列の数え上げ

この節では，Cauchy 型の行列式 (2) を利用して，対称性をもつ交代符号行列の数え上げ問題が解決できることを説明する．

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ は，次の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとき，交代符号行列（alternating sign matrix）であるという．

(i) $a_{ij} \in \{1, 0, -1\}$.

(ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$.

(iii) 各行，各列において 0 でない成分を見ると，1 と -1 が交互に現れる．

n 次交代符号行列全体のなす集合と $\mathcal{A}_n$ と表す．

例えば，置換行列は交代符号行列である．また，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は 3 次の交代符号行列であり，$\mathcal{A}_3$ はこの行列と 6 個の 3 次置換行列の計 7 個からなる集合である．

交代符号行列は，Robbins–Rumsey によって，行列式を計算する Lewis Carroll のアルゴリズム（condensation of determinant）に関する研究の中から発見された．そして，Mills–Robbins–Rumsey が提出した n 次の交代符号行列の個数に関する予想は，十数年後に Zeilberger, Kuperberg によって全く異なる方法で証明された．(交代符号行列に関しては，[B] を参照されたい．)

定理 4.1. (Zeilberger [Z], Kuperberg [K1]) n 次交代符号行列の個数は

$$\#\mathcal{A}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!}$$

で与えられる．

位数 8 の正二面体群 D_8（正方形の対称性の群）が自然に $\mathcal{A}_n$ に作用している．従って，D_8 の部分群 H に対して，H による固定点を数え上げるという問題も自然に考えられ，Robbins [R] は H に関する対称性をもつ交代符号行列の個数に関してさまざまな予想を提出している．Kuperberg [K2] は，square ice model（の基礎となるグラフと境界条件）をうまく設定し，次の 2 つの段階を経て，対称性をもつ交代符号行列の数え上げ問題（のうちのいくつか）を解決している．

(a) square ice model の分配関数を，Yang–Baxter 方程式を用いることによって，行列式，あるいは Pfaffian の形に表す．

(b) (a) で求めた行列式，Pfaffian を，含まれるスペクトルパラメーターを q のべきに特殊化した場合に，その行列式，Pfaffian を割り切る因子を見出すことによって計算する．

ところが，Cauchy 型の行列式，Pfaffian の等式（定理 1.3）を利用すると，(a) で求めた分配関数が本質的に古典群の既約指標で表されることがわかるだけでなく，スペクトルパラメーターを q のべきに特殊化することでは証明できなかった vertically and horizontally symmetric な交代符号行列の数え上げ問題も解決できる．([O2] を見よ．) 以下では，この場合を説明する．

n 次交代符号行列 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ は

$$a_{i,j}=a_{n+1-i,j}=a_{i,n+1-j}=a_{n+1-i,n+1-j}\quad(1\le i,j\le n)$$

をみたすとき，つまり，正方形の垂直方向，水平方向の両軸に関して対称であるとき，**vertically and horizontally symmetric**（略して VHS）であるという．n 次 VHS 交代符号行列全体のなす集合を $\mathcal{A}_n^{\mathrm{VHS}}$ と表す．交代符号行列の第 1 列，第 1 行には -1 が現れないことに注意すると，n 次 VHS 交代符号行列が存在するためには，n が奇数でなければならないことがわかる．例えば，

$$\mathcal{A}_3^{\mathrm{VHS}}=\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right\},\qquad \mathcal{A}_5^{\mathrm{VHS}}=\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&-1&1&0\\1&-1&1&-1&1\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathcal{A}_7^{\mathrm{VHS}}=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&-1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0\\1&-1&1&-1&1&-1&1\\0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&-1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&-1&1&0&0\\0&1&-1&1&-1&1&0\\1&-1&1&-1&1&-1&1\\0&1&-1&1&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Kuperberg [K2] は，VHS 交代符号行列に対応する square ice model の分配関数を行列式の形で与えている．彼の結果を述べるために，記号を導入する．まず，スペースを節約するために，

$$\sigma(t)=t-\frac{1}{t}$$

とおく．n 次正方行列 $M_{\mathrm{U}}(n;\vec{x},\vec{y};a)$ と $M_{\mathrm{UU}}(n;\vec{x},\vec{y};a,b,c)$ を，その (i,j) 成分を

$$\begin{aligned}M_{\mathrm{U}}(n;\vec{x},\vec{y};a)_{ij}&=\frac{1}{\sigma(ax_i/y_j)\sigma(ay_j/x_i)}-\frac{1}{\sigma(ax_iy_j)\sigma(a/x_iy_j)},\\ M_{\mathrm{UU}}(n;\vec{x},\vec{y};a,b,c)_{ij}&=\frac{\sigma(b/y_j)\sigma(cx_i)}{\sigma(ax_i/y_j)}-\frac{\sigma(b/y_j)\sigma(c/x_i)}{\sigma(a/x_iy_j)}\\ &\quad-\frac{\sigma(by_j)\sigma(cx_i)}{\sigma(ax_iy_j)}+\frac{\sigma(by_j)\sigma(c/x_i)}{\sigma(ay_j/x_i)}\end{aligned}$$

とおいて定める．さらに，

$$
\begin{aligned}
&A_{\mathrm{UU}}(n;\vec{x},\vec{y};a,b,c)\\
&=\frac{1}{\sigma(a)^{4n^2-n}\sigma(a^2)^{2n}}\cdot\prod_{i=1}^{n}\sigma(ax_i^2)\sigma(a^2/y_i^2)\\
&\times\frac{\prod_{i,j=1}^{n}\sigma(ax_i/y_j)^2\sigma(ay_j/x_i)^2\sigma(ax_iy_j)^2\sigma(a/x_iy_j)^2}{\prod_{1\le i<j\le n}\sigma(x_j/x_i)^2\sigma(y_i/y_j)^2\prod_{1\le i\le j\le n}\sigma(1/x_ix_j)^2\sigma(y_iy_j)^2}\\
&\times\det M_{\mathrm{U}}(n;\vec{x},\vec{y};a)\det M_{\mathrm{UU}}(n;\vec{x},\vec{y};a,b,c)
\end{aligned}
$$

とおく．このとき，

定理 4.2. (Kuperberg [K2]) $\zeta_6=\exp(2\pi\sqrt{-1}/6)$ とおくと，VHS 交代符号行列の個数は，

$$
\begin{aligned}
\#\mathcal{A}_{4n+1}^{\mathrm{VHS}}&=A_{\mathrm{UU}}(n;\vec{1},\vec{1};\zeta_6,\zeta_6,\zeta_6),\\
\#\mathcal{A}_{4n+3}^{\mathrm{VHS}}&=A_{\mathrm{UU}}(n;\vec{1},\vec{1};\zeta_6,\zeta_6^{-1},\zeta_6^{-1})
\end{aligned}
$$

で与えられる．ここで，$\vec{1}=(1,1,\cdots,1)$ である．

この定理から，VHS 交代符号行列の個数を求めるには，$\det M_{\mathrm{U}}(n;\vec{x},\vec{y};\zeta_6)$ と $\det M_{\mathrm{UU}}(n;\vec{x},\vec{y};\zeta_6,\zeta_6^{\pm1},\zeta_6^{\pm1})$ が計算できればよい．少し計算すると，

$$
\det M_{\mathrm{U}}(n;\vec{x},\vec{y};\zeta_6)=\prod_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2\cdot\det\left(\frac{\det W^2(x_i^6,y_j^6;-x_i^2,-y_j^2)}{(1-x_i^6y_j^6)(y_j^6-x_i^6)}\right)_{1\le i,j\le n},
$$

$$
\begin{aligned}
\det M_{UU}(\vec{x},\vec{y};\zeta_6,\zeta_6,\zeta_6)&=\sigma(\zeta_6)^n\prod_{i=1}^{n}(1-x_i^2)(1-y_i^2)\\
&\quad\times\det\left(\frac{\det W^2(x_i^6,y_j^6;x_i^4,y_j^4)}{(1-x_i^6y_j^6)(y_j^6-x_i^6)}\right)_{1\le i,j\le n}
\end{aligned}
$$

となり，等式 (4) （の $p=0$ の場合，定理 1.3）を利用できる．しかし，

$$
\begin{aligned}
\det M_{UU}(\vec{x},\vec{y};\zeta_6,\zeta_6^{-1},\zeta_6^{-1})&=\sigma(\zeta_6)^n\prod_{i=1}^{n}(1-x_i^4)(1-y_i^4)\\
&\quad\times\det\left(\frac{x_i^4y_j^2+x_i^2y_j^4+2x_i^2y_j^2+x_i^2+y_j^2}{(x_i^4+x_i^2y_j^2+y_j^4)(x_i^4y_j^4+x_i^2y_j^2+1)}\right)_{1\le i,j\le n}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

となるので，このままでは Cauchy 型の行列式が利用できない．ここで，(23) の右辺の行列式の (i,j) 成分の分子が

$$
x_i^4y_j^2+x_i^2y_j^4+2x_i^2y_j^2+x_i^2+y_j^2=x_i^2y_j^2\cdot s_{(\square)}(x_i^2,y_j^2,1)
$$

と表されることに注意する．ただし，

$$s_{\langle\square\rangle}(x,y,z)=x+y+z+x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}$$

は斜交群 Sp_6 の自然表現（ベクトル表現）の指標である．そこで，(23) の右辺の行列式の (i,j) 成分の分子を

$$x_i^4y_j^2z^2+x_i^2y_j^4z^2+x_i^2y_j^2z^4+x_i^2y_j^2+x_i^2z^2+y_j^2z^2$$

で置き換えたものを考えると，

$$\begin{aligned}
&\det\left(\frac{x_i^4y_j^2z^2+x_i^2y_j^4z^2+x_i^2y_j^2z^4+x_i^2y_j^2+x_i^2z^2+y_j^2z^2}{(x_i^4+x_i^2y_j^2+y_j^4)(x_i^4y_j^4+x_i^2y_j^2+1)}\right)_{1\le i,j\le n}\\
&=\frac{1}{(1-z^2)^n\prod_{i=1}^n(1-x_i^4)(1-y_i^4)(z^2-x_i^2)(z^2-y_i^2)(1-x_i^2z^2)(1-y_i^2z^2)}\\
&\quad\times\det\left(\frac{\det W^3(x_i^6,y_j^6;-x_i^4,-y_j^4)}{(1-x_i^6y_j^6)(y_j^6-x_i^6)}\right)_{1\le i,j\le n}
\end{aligned}$$

となる．従って，等式 (4) （の $p=1$ の場合，定理 1.3）を適用することができる．これによってすべての計算が実行できる．結果を述べるために，次のような古典群の（既約）指標を導入する．変数 $\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ と長さ n 以下の分割 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に対して，

$$s_{\langle\lambda\rangle,\mathrm{Sp}_{2n}}(\overrightarrow{x})=\frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j+1}-x_i^{-\lambda_j-n+j-1}\right)_{1\le i,j\le n}}{\det\left(x_i^{n-j+1}-x_i^{-n+j-1}\right)_{1\le i,j\le n}},$$

$$s_{[\Delta+\lambda],\mathrm{Spin}_{2n}}(\overrightarrow{x})=\frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j+1/2}+x_i^{-\lambda_j-n+j-1/2}\right)_{1\le i,j\le n}}{\frac{1}{2}\det\left(x_i^{n-j}+x_i^{-n+j}\right)_{1\le i,j\le n}}$$

とおく．つまり，$s_{\langle\lambda\rangle}(\overrightarrow{x})$ は斜交群 Sp_{2n} の最高ウェイト λ をもつ既約表現 $V_{\langle\lambda\rangle,\mathrm{Sp}_{2n}}$ の指標であり，$s_{[\Delta+\lambda]}(\overrightarrow{x})$ はスピノル群 Spin_{2n} の最高ウェイト

$$(\lambda_1+1/2,\cdots,\lambda_{n-1}+1/2,\lambda_n+1/2),\quad(\lambda_1+1/2,\cdots,\lambda_{n-1}+1/2,-\lambda_n-1/2)$$

をもつ 2 つの既約表現の直和 $V_{[\Delta+\lambda],\mathrm{Spin}_{2n}}$ の指標である．これらの指標を用いると，次のように結果が表される．

定理 4.3. $A_{\mathrm{UU}}(n;\overrightarrow{x},\overrightarrow{y};\zeta_6,\zeta_6^{\pm1},\zeta_6^{\pm1})$ は，次のように斜交群，スピノル群の指標を

用いて表される．

$$A_{\mathrm{UU}}(n;\vec{x},\vec{y};\zeta_6,\zeta_6,\zeta_6)=\frac{1}{3^{n(2n-1)}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sigma(\zeta_6^2x_i^2)}{\sigma(\zeta_6^2)}\frac{\sigma(\zeta_6^2/y_i^2)}{\sigma(\zeta_6^2)}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(x_i+1/x_i)(y_i+1/y_i)}$$
$$\times s_{\langle\delta(n-1)\cup\delta(n-1)\rangle,\mathrm{Sp}_{4n}}(x_1^2,\cdots,x_n^2,y_1^2,\cdots,y_n^2)$$
$$\times s_{[\Delta+(\delta(n)\cup\delta(n-1))],\mathrm{Spin}_{4n}}(x_1^2,\cdots,x_n^2,y_1^2,\cdots,y_n^2),$$
$$A_{\mathrm{UU}}(n;\vec{x},\vec{y};\zeta_6,\zeta_6^{-1},\zeta_6^{-1})=\frac{1}{3^{n(2n-1)}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sigma(\zeta_6^2x_i^2)}{\sigma(\zeta_6^2)}\frac{\sigma(\zeta_6^2/y_i^2)}{\sigma(\zeta_6^2)}$$
$$\times s_{\langle\delta(n-1)\cup\delta(n-1)\rangle,\mathrm{Sp}_{4n}}(x_1^2,\cdots,x_n^2,y_1^2,\cdots,y_n^2)$$
$$\times s_{\langle\delta(n)\cup\delta(n-1)\rangle,\mathrm{Sp}_{4n+2}}(x_1^2,\cdots,x_n^2,y_1^2,\cdots,y_n^2,1).$$

ここで，

$$\delta(n-1)\cup\delta(n-1)=(n-1,n-1,n-2,n-2,\cdots,1,1,0,0),$$
$$\delta(n)\cup\delta(n-1)=(n,n-1,n-1,n-3,n-3,\cdots,2,1,1,0).$$

特に，$x_1=\cdots=x_n=y_1=\cdots=y_n=1$ とおくと，定理 4.2 とあわせることによって，次の系が得られる．

系 4.4. VHS 交代符号行列の個数は，

$$\#\mathcal{A}_{4n+1}^{\mathrm{VHS}}=\frac{1}{2^{2n}3^{n(2n-1)}}\dim V_{\langle\delta(n-1)\cup\delta(n-1)\rangle,\mathrm{Sp}_{4n}}\dim V_{[\Delta+(\delta(n)\cup\delta(n-1))],\mathrm{Spin}_{4n}},$$
$$\#\mathcal{A}_{4n+3}^{\mathrm{VHS}}=\frac{1}{3^{n(2n-1)}}\dim V_{\langle\delta(n-1)\cup\delta(n-1)\rangle,\mathrm{Sp}_{4n}}\dim V_{\langle\delta(n)\cup\delta(n-1)\rangle,\mathrm{Sp}_{4n+2}}$$

で与えられる．

この系と Weyl の次元公式を用いると，VHS 交代符号行列に対する Robbins の予想が証明できる．

参考文献

[B] D. M. Bressoud, Proofs and Confirmations : The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture, Cambridge Univ. Press, 1999.

[C] A. L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions alternée et les sommes alterneée, Exercisex Anal. et Phys. Math. **2** (1841), 151–159 ; Oeuvres, ser.2, vol.12, pp.173–182.

[F] G. Frobenius, Über die elliptischen Funktionen zweiter Art, J. Reine und Angew. Math. **93** (1882), 53–68.

[IW] M. Ishikawa and M. Wakayama, Minor summation formulas of Pfaffians, Linear and Multilinear Algebra **39** (1995), 285–305.

[K1] G. Kuperberg, Another proof of the alternating-sign matrix conjecture, Internat. Math. Res. Notices (1996), 139–150.

[K2] G. Kuperberg, Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof, Ann. Math. **156**, 835–866.

[M] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials (2nd ed.), Oxford Univ. Press, 1995.

[O1] S. Okada, Applications of minor summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups, J. Algebra **205** (1998), 337–367.

[O2] S. Okada, Enumeration of alternating sign matrices and characters of classical groups, in preparation.

[O3] S. Okada, An elliptic generarization of Schur's Pfaffian identity, in preparation.

[R] D. P. Robbins, Symmetry classes of alternating sign matrices, `arXiv:math.CO/0008045`

[Sc] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternirenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutuionen, J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.

[St] R. P. Stanley, Symmetries of plane partitions, J. Combin. Theory Ser. A **43** (1986), 103–113 ; Erratum, J. Combin. Theory Ser. A **44** (1987), 310.

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis (4th ed.), Cambridge Univ. Press, 1927.

[Z] D. Zeilberger, Proof ot the alternating-sign matrix conjecture, Electron. J. Combin. **3** (2) (1996), #R13.